

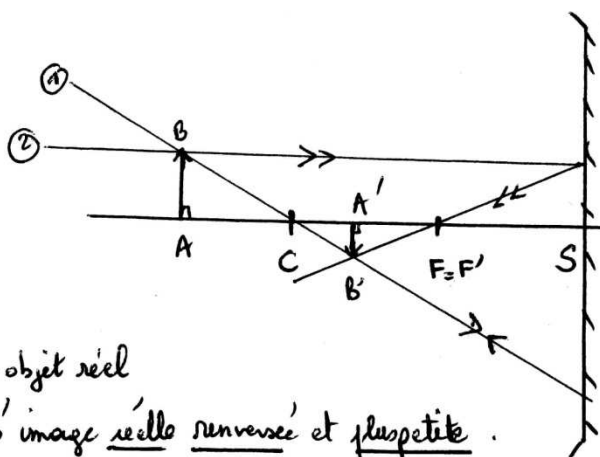
# Correction du TP MIROIRS SPHERIQUES

## Introduction

On étudie, dans ce TP, les caractéristiques (position et dimension) de l'image d'un objet par un miroir sphérique concave. Cette étude est faite pour une **image réelle** (projetable sur un écran) de façon qualitative (II.1.) avec un **objet réel et virtuel** ; puis de façon quantitative (II.2.) en utilisant les relations de conjugaison et de grandissement des miroirs sphériques avec un **objet réel**.

On détermine la distance focale du miroir sphérique mis à notre disposition en TP par deux méthodes : **autocollimation** (II.2.a.) et **conjugaison** (II.2.b.). Pour chaque méthode, on prend soin d'estimer les incertitudes sur les différentes mesures effectuées (position et dimension de l'image et de l'objet...).

## I. Préliminaires : Comment reconnaître rapidement la nature d'un miroir



- AB objet réel
- A'B' image réelle renversée et plus petite.

- ① Rayon partant par B et C n'est pas dévié
  - ② Rayon partant par B et // à l'axe émerge en passant par le foyer image P' (confondu avec F)
- B' correspond à l'intersection des deux rayons émergents. A' est le projeté orthogonal de B' sur l'axe.  
(Stigmatisme et aplanétisme approché dans les conditions de Gauss)

Objet réel avant C :  $\boxed{\overline{SA} < \overline{SC} < 0} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA}} > \frac{1}{\overline{SC}}$

Or d'après la relation de conjugaison de Descartes concernant les miroirs :

$$\frac{1}{\overline{SA}'} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}}$$

que l'on remplace dans l'inégalité

ci dessus :  $0 > \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}} > \frac{1}{\overline{SC}}$  soit  $-\frac{2}{\overline{SC}} > -\frac{1}{\overline{SA}} > -\frac{1}{\overline{SC}} \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{SC}}{2} > \overline{SA}' > \overline{SC}}$

• A' se trouve entre C et F, c'est une image réelle

•  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA}'}{\overline{SA}}$

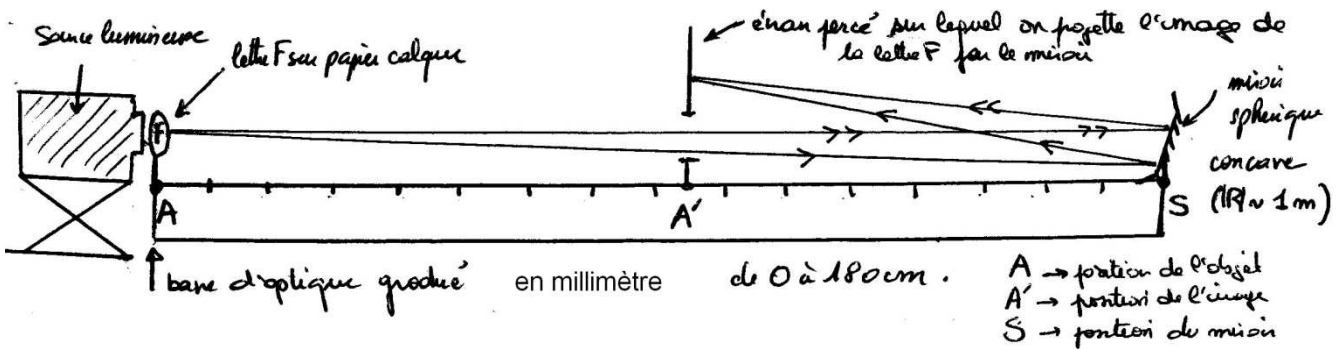
- + comme  $\overline{SA}$  et  $\overline{SA}'$  sont de même signe (ici négatif) :  $\gamma < 0$ , image renversée
- +  $\overline{SA} < \overline{SC} < 0 \Rightarrow |\overline{SA}| > |\overline{SC}|$  donc  $|\overline{SA}| > |\overline{SA}'| \Rightarrow |\gamma| < 1$ , image plus petite
- +  $0 > \overline{SA}' > \overline{SC} \Rightarrow |\overline{SA}'| < |\overline{SC}|$

En conclusion :  $-1 < \gamma < 0$

## II. Miroir concave

### 1. Nature de l'image

#### a) Objet réel



L'image est renversée et plus petite que l'objet.

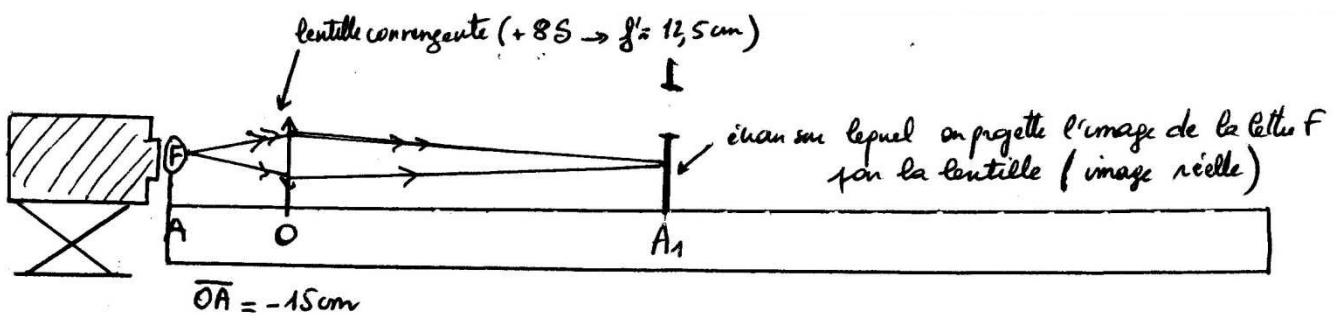
- Quand on déplace le miroir (on le rapproche de l'objet car il est initialement à l'extrémité du banc), on constate que l'image renversée s'agrandit ( $|Y| \uparrow$ ) et s'éloigne du miroir ( $|\overline{SA'}| \uparrow$ )

Explication: Distance miroir - objet  $\downarrow$  :  $|\overline{SA}| \downarrow \Rightarrow \overline{SA} \uparrow \Rightarrow \frac{1}{SA} \downarrow$   
( $\overline{SA} < 0$ )

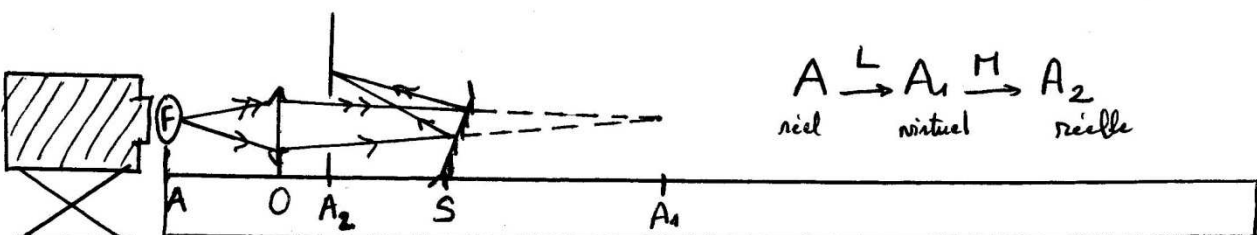
or  $\frac{1}{SA} = \frac{2}{SC} - \frac{1}{SA'}$ , avec  $SC = \text{constante}$  d'où  $\frac{1}{SA} \uparrow \Rightarrow \overline{SA'} \downarrow \Rightarrow |\overline{SA'}| \uparrow$   
( $\overline{SA'} < 0$ )

•  $|Y| = \left| \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \right| \uparrow$

#### b) Objet virtuel



on place le miroir sphérique à 30 cm devant l'image  
 $\overline{SA_1} = 30 \text{ cm}$  ( $A_1$  objet virtuel pour le miroir)



- Explication à l'aide des relations de conjugaison et de grandissement

$$\textcircled{A} A \xrightarrow{L} A_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V = 8.8 \text{ soit } f' = \frac{1}{V} = 12,5 \text{ cm} \\ \overline{OA} = -15 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{d'où d'après } \frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

il vient  $\overline{OA_1} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}} = 7,5 \text{ cm}$  (image réelle).  $\gamma = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} < -1$  (image  $\oplus$  grande et renversée)

$$\textcircled{B} A_1 \xrightarrow{M} A_2 \quad \begin{cases} \overline{SA_1} = +30 \text{ cm (objet virtuel)} \\ R = \overline{SC} = -1 \text{ m} \end{cases} \quad \text{d'où d'après } \frac{1}{\overline{SA_2}} + \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

il vient  $\overline{SA_2} = \frac{1}{\frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA_1}}} = -19 \text{ cm}$  (image réelle).  $\gamma = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}$  vérifie  $0 < \gamma < 1$  (image droite et plus petite)

- On constate expérimentalement que :

$\textcircled{*}$  si la lentille s'éloigne de l'objet alors l'image  $A_2$  se rapproche de la lentille et sa dimension diminue.  $A_2$  se rapproche du miroir et s'agrandit.

Explication :  $|\overline{OA}| \uparrow \Rightarrow \overline{OA} \downarrow \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA}} \uparrow \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} \uparrow \Rightarrow \overline{OA_1} \downarrow$   
( $\overline{OA} < 0$ ) ( $\overline{OA_1} > 0$ )

$\Rightarrow |\gamma| \downarrow$  :  $A_1$  se rapproche de la lentille (le miroir n'ayant pas bougé).  $|\gamma| = \left| \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} \right| \downarrow$

$|\overline{SA_1}| \downarrow \Rightarrow \overline{SA_1} \downarrow \Rightarrow \dots \Rightarrow \overline{SA_2} \uparrow \Rightarrow |\overline{SA_2}| \downarrow$  ( $A_2$  se rapproche du miroir)  
( $\overline{SA_1} > 0$ ) [ $\uparrow$  cf II.2.a)] ( $\overline{SA_2} < 0$ )

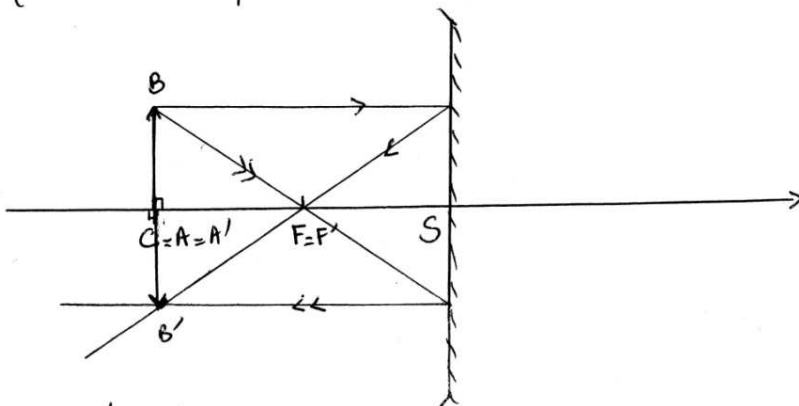
$|\gamma| = \left| \frac{\overline{FS}}{\overline{FA_1}} \right|$   $\overline{SA_1} \downarrow$  alors  $\overline{FA_1} = \overline{FS} + \overline{SA_1} \downarrow$  d'où  $|\overline{FA_1}| \downarrow$  et  $|\gamma| \uparrow$  ( $A_2$  s'agrandit)

$\textcircled{*}$  si la lentille se rapproche de l'objet alors l'image  $A_1$  s'éloigne et s'agrandit et devient rapidement plus visible ( $|\overline{OA}| < f'$ ).

## 2. Détermination du rayon de courbure et de la distance focale, vérification des relations de conjugaison et de grandissement.

### a) Méthode d'autocollimation (détermination rapide de f et R)

La position de miroir pour laquelle l'image se forme renversée dans le plan de l'objet correspond à  $\overline{SA} = \overline{SC} = \overline{SA'}$ . Le grandissement vaut  $\gamma = -1$  (même dimension pour l'objet et l'image).



Explication :  $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$  . Si  $\overline{SA} = \overline{SA'}$  ( $A=A'$ ) alors  $\frac{2}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$  et  $\overline{SA} = \overline{SC}$ .

$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$  . Si  $\overline{SA} = \overline{SA'}$  alors  $\underline{\gamma = -1}$ .

**Mesures :**

On mesure la distance objet-miroir pour laquelle l'objet et l'image sont dans le même plan soit :  $\overline{SA'} = \overline{SA} = \overline{SC} = R = -98,0\text{cm}$ .

**Incertitudes :**

L'incertitude sur cette mesure est due à la précision du banc d'optique (graduation au mm) et à l'appréciation de la netteté de l'image (quelques centimètres : on prendra 1cm par exemple) qui correspond à la distance entre les deux positions extrêmes de l'écran où l'image est vue à la limite de netteté.

Remarques : On peut aussi prendre en compte l'incertitude sur la position de l'objet, repérée à l'aide d'une tige grise de quelques millimètres d'épaisseur ; l'incertitude sur la position de l'image, que certains ont projetée sur un écran positionné en dehors du banc d'optique.

Par conséquent on estime :  $\Delta R \approx 2\text{cm}$ .

**Résultats :**

- **Le rayon de courbure vérifié :**  $R = (-98 \pm 2)\text{cm}$   
que l'on peut aussi écrire  $-96\text{cm} \geq R \geq -100\text{cm}$ .
- **La distance focale vérifiée :**  $f = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2} = \frac{R}{2}$  avec  $\Delta f = \frac{\Delta R}{2} = 1\text{cm}$  soit  $f = (-49,0 \pm 1)\text{cm}$

**b) Méthode de conjugaison**

• Schéma du protocole expérimental identique au II.1.a) et au I.  
L'objet (lettre F) est placé à l'origine du banc d'optique. On rapproche le miroir, initialement placé à l'extrémité du banc, de l'objet par pas de 10 cm. Pour chaque position du miroir on mesure la position de l'image et sa dimension. Ces données sont présentes dans le tableau ci-dessous. Les deux expressions du grandissement, leur comparaison (ERG : erreur relative sur le grandissement) et la distance focale sont obtenues à l'aide d'un logiciel de traitement de données.

**Mesures :**

$\overline{AB} = 2,1\text{cm}$

	objet réel ↓	image réelle ↓	image renversée et plus petite ↓				
Mesures	$\overline{SA}$ (cm)	$\overline{SA'}$ (cm)	$\overline{A'B'}$ (cm)	$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$	$\gamma_2 = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$	$f$ (cm)	ERG $ \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2} $
1	-180	-68.5	-0.80	-0.381	-0.3806	-49.62	1.043E-3
2	-170	-69.7	-0.85	-0.4048	-0.41	-49.43	0.01278
3	-160	-71.1	-0.90	-0.4286	-0.4444	-49.23	0.03556
4	-150	-74.5	-1.00	-0.4762	-0.4967	-49.78	0.04123
5	-140	-76.7	-1.10	-0.5238	-0.5479	-49.55	0.04389
6	-130	-80.0	-1.20	-0.5714	-0.6154	-49.52	0.07143
7	-120	-84.3	-1.40	-0.6667	-0.7025	-49.52	0.05101
8	-110	-90.1	-1.60	-0.7619	-0.8191	-49.53	0.06982

mesures expérimentales
calculs effectués à l'aide de Synergie

• Pour calculer  $f (= f')$  on a utilisé la relation de conjugaison suivante  $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SF}} = \frac{1}{f}$   
soit  $f = \frac{\overline{SA}\overline{SA'}}{(\overline{SA} + \overline{SA'})}$ .

## Incertitudes :

- **Directes**

L'incertitude sur ces mesures est principalement due à la précision du banc d'optique, à la précision de la règle qui a permis de mesurer les tailles de l'objet et de l'image (graduation au mm) et à l'appréciation de la netteté de l'image.

$$\Delta \overline{AB} = 1\text{mm} \text{ (précision de la règle)}$$

$$\Delta \overline{A'B'} = 1\text{mm} \text{ (précision de la règle)}$$

$$\Delta \overline{SA} = 2\text{mm} \text{ (précision du banc d'optique)}$$

$$\Delta \overline{SA'} = 12\text{mm} \text{ (précision du banc d'optique + appréciation de la netteté de l'image)}$$

- **Indirectes**

$$\textcircled{1} \gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \Rightarrow |\gamma_1| = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} \Rightarrow \ln |\gamma_1| = \ln |\overline{A'B'}| - \ln |\overline{AB}| \Rightarrow d \ln |\gamma_1| = d \ln |\overline{A'B'}| - d \ln |\overline{AB}|$$

*differentiation*

$$\Rightarrow \frac{d|\gamma_1|}{|\gamma_1|} = \frac{d|\overline{A'B'}|}{|\overline{A'B'}|} - \frac{d|\overline{AB}|}{|\overline{AB}|} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \gamma_1}{|\gamma_1|} = \frac{\Delta \overline{A'B'}}{|\overline{A'B'}|} + \frac{\Delta \overline{AB}}{|\overline{AB}|}}$$

$$\textcircled{2} \gamma_2 = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \gamma_2}{|\gamma_2|} = \frac{\Delta \overline{SA'}}{|\overline{SA'}|} + \frac{\Delta \overline{SA}}{|\overline{SA}|}}$$

$$\textcircled{3} \Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial \overline{SA'}} \right| \Delta \overline{SA'} + \left| \frac{\partial f}{\partial \overline{SA}} \right| \Delta \overline{SA} \quad \text{avec} \quad f = \frac{\overline{SA} \overline{SA'}}{\overline{SA} + \overline{SA'}}$$

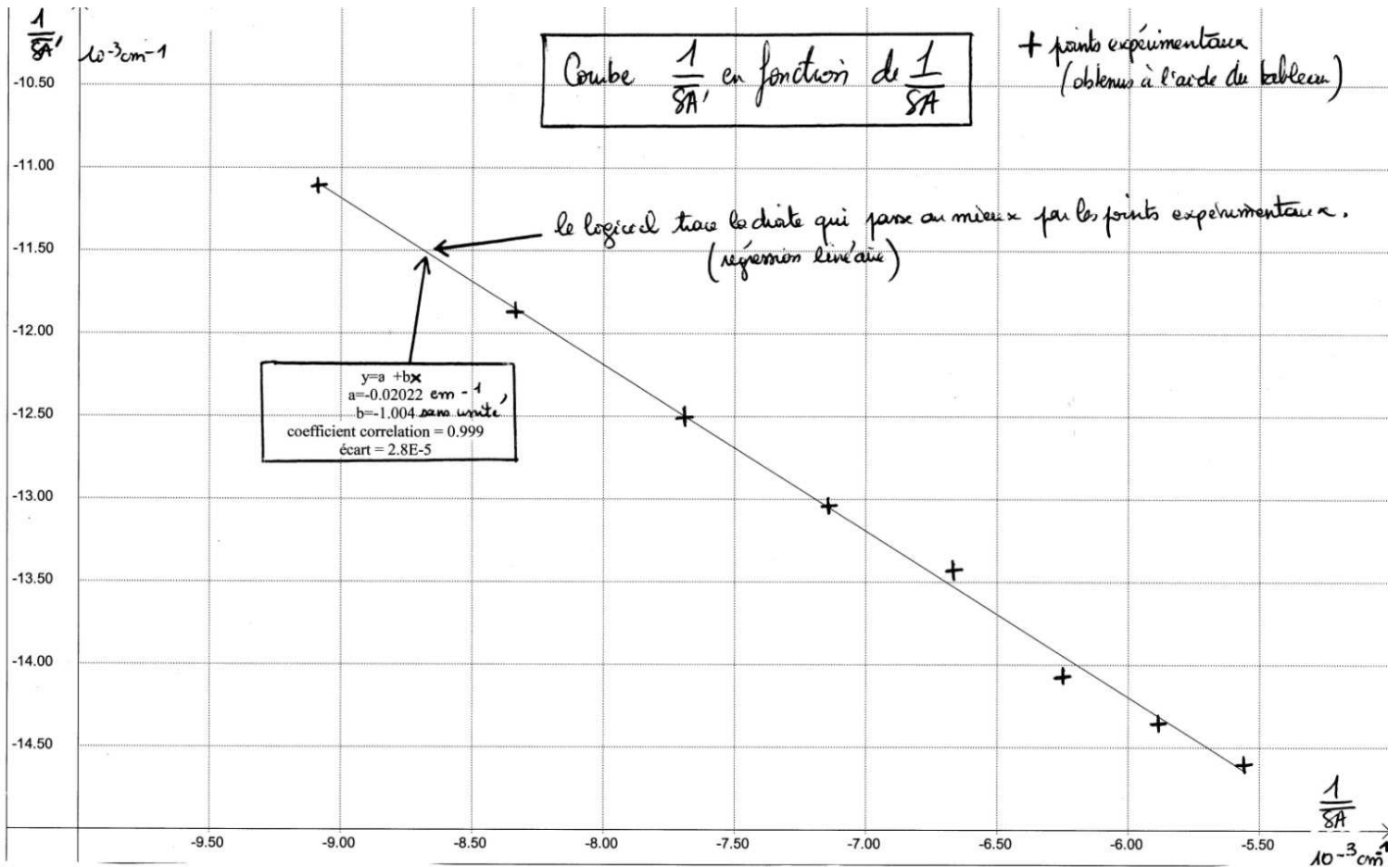
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{SA'}} : \begin{cases} \overline{SA} \rightarrow a \text{ (constant)} \\ \overline{SA'} \rightarrow x \text{ (variable)} \end{cases} f \rightarrow \frac{ax}{a+x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{SA'}} \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{a(a+x) - ax}{(a+x)^2} = \frac{a^2}{(a+x)^2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{SA'}} = \frac{(\overline{SA})^2}{(\overline{SA} + \overline{SA'})^2}$$

$\overline{SA'}$  et  $\overline{SA}$  jouent un rôle symétrique dans l'expression de  $f$  d'où :

$$\boxed{\Delta f = \frac{(\overline{SA})^2}{(\overline{SA} + \overline{SA'})^2} \Delta \overline{SA'} + \frac{(\overline{SA'})^2}{(\overline{SA} + \overline{SA'})^2} \Delta \overline{SA}}$$

## EXPLOITATION

❖ Vérification de la loi de conjugaison : Courbe  $\frac{1}{SA'}$  en fonction de  $\frac{1}{SA}$



L'équation de la droite est  $y = -1,004x - 0,02022$ . Le coefficient de corrélation = 0,999

très voisin de 1 valide le modèle linéaire pour la courbe  $\frac{1}{SA'}$  en fonction de  $\frac{1}{SA}$ .

Le coefficient directeur de la droite vaut -1 et l'ordonnée à l'origine nous donne accès à  $f = \frac{1}{-0,02022} = -49,46 \text{ cm}$  ce qui est en accord avec les données de  $f$  du tableau.

Conclusion: On vérifie bien expérimentalement la relation de conjugaison

$$\frac{1}{SA'} = -\frac{1}{SA} + \frac{1}{f} \text{ soit } \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{1}{f}$$

## ❖ Détermination de la distance focale et du rayon du miroir – Relation de grandissement

### ⊕ Distance focale (rayon de courbure)

A partir du tableau de mesures on obtient la valeur moyenne de  $f'$  :  $\langle f' \rangle = -49,52 \text{ cm}$

A partir du graphique on obtient  $f'_G = -49,46 \text{ cm}$ .

Pour comparer ces deux résultats il faut calculer  $\Delta f'$ . Prenons la mesure 4] par exemple et utilisons la formule établie précédemment. On trouve  $\Delta f' = 5 \text{ mm}$ . Toutes les mesures ont été effectuées dans des conditions semblables donc cette incertitude est valable pour toutes les mesures.

Par conséquent :  $-50 \text{ cm} \leq \langle f' \rangle \leq -49,0 \text{ cm}$  d'où  $-100 \text{ cm} \leq \langle R \rangle \leq -98 \text{ cm}$   
 précision de la mesure  $\frac{\Delta f'_{\text{max}}}{f'} = 1\%$  ( $R = 2f'$  d'où  $\Delta R = 2\Delta f' = 1 \text{ cm}$ )

On constate que  $f'_G$  est contenue dans cet intervalle : les deux déterminations de  $f'$  sont compatibles et donc l'estimation de nos incertitudes est satisfaisante.

### ⊕ Grandissement

On dispose de deux déterminations de  $\gamma$   $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{A'B'}{AB} \\ \gamma_2 = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \end{array} \right.$

• L'écart relatif entre ces deux mesures peut être relativement important.

(cf. tableau : ERG max  $\approx 7\%$  mesures 6 et 8)

• Pour comprendre cet écart il faut calculer  $\frac{\Delta \gamma}{\gamma}$  pour les deux déterminations.

Prenons par exemple la mesure 6] (correspondant à l'écart relatif le plus élevé) et

utilisons la formule établie précédemment. On trouve :  $\frac{\Delta \gamma_1}{|\gamma_1|} = 0,13 \approx 10\%$

• On constate que la précision sur  $\gamma_2$  est meilleure que celle sur  $\gamma_1$ . Ceci est due au fait que les grandeurs

mesurées pour  $\gamma_2$  ( $\overline{SA}$  et  $\overline{SA'}$ ) sont plus importantes que pour  $\gamma_1$  ( $\overline{AB}$ ,  $\overline{A'B'}$ ) et donc l'incertitude relative est plus faible.

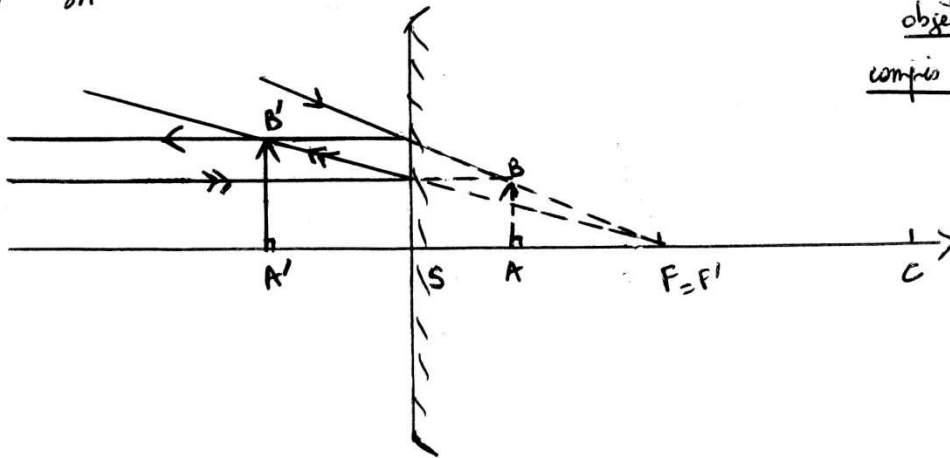
• Ainsi pour la mesure 6] par exemple  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta \gamma_1 = 18,1 \times 0,13 = 0,07 \\ -0,64 \leq \gamma_2 \leq -0,50 \end{array} \right.$ . La valeur de  $\gamma_2 = 0,62$

est contenue dans cet intervalle : les deux mesures du grandissement sont compatibles.

Conclusion : La seconde détermination de  $\gamma$ ,  $\gamma_2$ , est préférable compte tenu de la précision de la mesure.

### III. Miroirs convexes

On souhaite une image réelle :  $\overline{SA'} < 0 \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} < 0 \Rightarrow \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{FA}} < 0$   
 $\Rightarrow \frac{2}{\overline{SC}} < \frac{1}{\overline{FA}}$  avec  $\overline{SC} > 0$  car le miroir est convexe soit  $0 < \overline{SA} < \frac{\overline{SC}}{2}$



objet virtuel  
compris entre S et F.

L'objet virtuel peut être obtenu de la même façon que dans le cas du miroir concave (cf II 1) b). On fait l'image réelle  $A_1B_1$  de l'objet  $AB$  (entre  $F$  sur papier calque positionnée au zéro du banc d'optique) par une lentille convergente. On place le miroir convexe devant cette image en prenant garde à respecter la condition  
 $0 < \overline{SA_1} < \frac{\overline{SC}}{2}$  pour obtenir une image  $A'B'$  réelle que l'on projette sur un écran.

### Conclusion

On a expérimenté différentes méthodes de détermination de la distance focale d'un miroir sphérique (autocollimation et conjugaison). Grâce à l'estimation des incertitudes de mesure pour chaque méthode, on a obtenu un encadrement de la distance focale (ou du rayon de courbure) du miroir. Ces encadrements se recoupent ce qui est cohérent. **Cependant la méthode de conjugaison est préférable car plus précise.** Néanmoins, **la méthode d'autocollimation a l'avantage d'être plus rapide.** Elle permet ainsi de vérifier rapidement les données de l'étiquette (certains miroirs étaient annoncés avec un rayon de courbure  $R=1\text{m}$  alors qu'après la mesure on trouve  $R=-1,25\text{m}$  soit une erreur relative d'environ 20% !).

On a également vérifié expérimentalement la relation de conjugaison des miroirs avec origine au sommet à l'aide d'une représentation graphique des données expérimentales et d'une régression linéaire effectuées par un logiciel de traitement de données. A l'aide du graphique nous avons obtenu une nouvelle détermination de la distance focale généralement en accord avec les valeurs obtenues à l'aide des méthodes précédentes.

Certains groupes ont constaté des écarts entre valeur moyenne et valeur obtenue à l'aide du graphique de la distance focale qui n'étaient pas justifiés par la détermination des incertitudes. Ces écarts peuvent être dus à l'affichage des données par le logiciel : trop peu de chiffres significatifs, valeurs arrondies ou tronquées. Dans d'autres cas, une mesure fautive peut faire varier de manière significative les caractéristiques de la régression linéaire (coefficient directeur et ordonnée à l'origine).